

Math

+ - × ÷

ONEET

มันส์...ง่ายมาก

By.....ครูโต้ง

**คำเตือน :** การติวเป็นเพียงเครื่องมือที่จะทำให้ได้คะแนนจากข้อสอบเท่านั้น  
ไม่ใช่การทำให้มีความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์มากขึ้นแต่อย่างไร  
จงตั้งใจเรียน ในระบบปกติให้ดีที่สุดครับ ^^

### ระบบจำนวนจริง

#### สมบัติของรากที่สองที่ควรทราบ

1.  $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$
2.  $(\sqrt{a})^2 = a$
3.  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
4.  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$  เมื่อ  $b \neq 0$
5.  $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1 \times \sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$  เมื่อ  $a \neq 0$
6.  $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$  เมื่อ  $a \neq b \neq 0$
7.  $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$  เมื่อ  $a \neq b \neq 0$

#### สูตรการแยกตัวประกอบของพหุนาม \*\*ที่ควรจดจำให้ได้ ^^

1.  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2.  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3.  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
5.  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
6.  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
7.  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
8.  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

การหาคำตอบของสมการ  $ax^2 + bx + c = 0$  คือ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ตัวอย่างข้อสอบ\*\*คำนวณไม่ยากแล้วเท่า การตรวจสอบทฤษฎี (เพราะเรามักจำไม่ได้^^)

1. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. จำนวนที่เป็นทศนิยมไม่รู้จบบางจำนวนเป็นจำนวนอตรรกยะ  
ข. จำนวนที่เป็นทศนิยมไม่รู้จบบางจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ

ข้อใดถูกต้อง

- 1) ข้อ ก. และข้อ ข. 2) ข้อ ก. เท่านั้น  
3) ข้อ ข. เท่านั้น 4) ข้อ ก. และข้อ ข. ผิด

2. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1.  $\sqrt{(-3)^2}$  ไม่เป็นจำนวนจริง 2. 3.1416 เป็นจำนวนอตรรกยะ  
3.  $\left(\frac{22}{7}\right)^2$  เป็นจำนวนอตรรกยะ 4.  $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}$  เป็นจำนวนตรรกยะ

3. ถ้า  $x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$  และ  $y = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$  แล้ว  $x^2 - 4xy + y^2$  เท่ากับเท่าใด

4. ถ้าหาร  $x^3 - 2x^2 - 5x + c$  ด้วย  $x - 1$  ลงตัวแล้ว จงหาค่าของ  $c$  // ทฤษฎีเศษเหลือ^^

1. 4 2. 5

3. 6 4. 7

5. ถ้า  $a$  คือ จำนวนจริงที่ทำให้สมการ  $4x^2 - 12x + a = 0$  มีเพียงคำตอบเดียว จงหาค่าของ  $a^2 - a$   
**หลักคิด : สมการกำลังสอง แบบใช้สูตรสำเร็จ .....**

**การแก้สมการและอสมการค่าสัมบูรณ์ \*\*เป็นเรื่องที่ออกเป็นประจำ\*\***

$$|x| = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

**ตัวอย่างข้อสอบ \*\* ปัญหาของเรื่องนี้ คือลืม การถอดเครื่องหมาย .....**

6. จงหาเซตคำตอบของอสมการ  $|2x + 3| = 5$

7. ผลเฉลยของสมการ  $4|3 - x| = 2$  อยู่ในช่วงใด

- 1)  $(-7, -2)$     2)  $(-11, -4)$
- 3)  $(-4, 4)$     4)  $(-2, 3)$

8. เกี่ยวกับ  $|x - 7| = 6$  ข้อใดไม่ถูกต้อง

- 1. คำตอบหนึ่งมีค่าระหว่าง 10 กับ 15
- 2. ผลบวกคำตอบเท่ากับ 14
- 3. สมการนี้มีคำตอบมากกว่า 2 คำตอบ
- 4. คำตอบที่น้อยที่สุดมีค่าน้อยกว่า 3

9. เซตคำตอบของอสมการ  $\frac{x+4}{2x-5} \leq 0$  เท่ากับข้อใด

1.  $\left[-4, \frac{-5}{2}\right]$       2.  $\left(-4, \frac{-5}{2}\right)$   
3.  $\left(-4, \frac{-5}{2}\right]$       4.  $\left[-4, \frac{-5}{2}\right)$

10. ให้  $a$  เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งอยู่ในเซตคำตอบของอสมการ  $|5x-10| < 3$  แล้ว  $a$  อยู่ในข้อใด

1.  $[-1,2)$                       2.  $(2,4)$   
3.  $[2,3)$                       4.  $[3,5)$

11. กำหนดให้  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริงซึ่ง  $|a|b^3c > 0$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก.  $ac > 0$
- ข.  $bc > 0$

เซต

**ประเภทของเซต**

เซตจำกัด หมายถึง เซตที่สามารถหาจำนวนสมาชิกได้

เซตอนันต์ หมายถึง เซตที่มีจำนวนสมาชิกไม่จำกัด

เซตว่าง หมายถึง เซตที่ไม่มีสมาชิกอยู่เลย แทนด้วย {} หรือ  $\emptyset$ 

ถ้า A เป็นเซตจำกัดใดๆ ที่มีสมาชิก n ตัว แล้ว

จำนวนสับเซตทั้งหมดของเซต A คือ

จำนวนสับเซตแท้ทั้งหมดของเซต A คือ

จำนวนสมาชิกของ  $P(A)$  คือจดตัวอย่าง....  $P(A)$ **เทคนิคเครื่องหมายของเซต :****เครื่องหมายของเซตประกอบไปด้วย .....****\*\*ต้องแม่นยำแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์\*\***

จดบนกระดาน.....

เทคนิคการดูสมาชิก และ ความเป็นสับเซต...

จดบันทึกระดาน....

ตัวอย่างข้อสอบ เรื่อง เซต

12. ถ้า  $A = \{ 1, 2, 3 \}$  และ  $B = \{ -1, -2, -3 \}$  จงหาจำนวนสมาชิกของ  $n(P(P(A \cap B)))$

13. ให้  $A$  และ  $B$  เป็นเซต  $n(A) = 5$ ,  $n(B) = 4$  และ  $n(A \cap B) = 2$

ถ้า  $C = (A - B) \cup (B - A)$  แล้ว  $n(P(C))$  เท่ากับเท่าใด \*\*ใช้การเขียนแผนภาพช่วย

14. ให้  $A = \{1, 2, 3, \dots\}$  และ  $B = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, 6, 7, 8, \dots\}$  ข้อใดเป็นเท็จ

- 1)  $A - B$  มีสมาชิก 5 ตัว
- 2) จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของ  $B - A$  เท่ากับ 4
- 3) จำนวนสมาชิกของ  $(A - B) \cup (B - A)$  เป็นจำนวนคู่
- 4)  $A \cap B$  คือเซตของจำนวนนับที่มีค่ามากกว่า 5

15. ในการสำรวจความชอบในการดื่มชาเขียวและกาแฟของกลุ่มตัวอย่าง 32 คน พบว่า ผู้ชอบดื่มชาเขียวมี 18 คน ผู้ชอบดื่มกาแฟมี 16 คน ผู้ไม่ชอบดื่มชาเขียวและไม่ชอบดื่มกาแฟมี 8 คน จำนวนคนที่ชอบดื่มชาเขียวอย่างเดียวมีกี่คน

16. ให้  $A$  และ  $B$  เป็นเซตซึ่ง  $n(A) = 5$ ,  $n(B) = 4$  และ  $n(A \cap B) = 2$

ถ้า  $C = (A - B) \cup (B - A)$  แล้ว  $n(P(C))$  เท่ากับเท่าใด \*\*วาดแผนภาพเวเนน-ออยเลอร์

17. ให้  $A$  เป็นเซตจำกัด และ  $B$  เป็นเซตอนันต์ ข้อความใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

- 1) มีเซตจำกัดที่เป็นสับเซตของ  $A$
- 2) มีเซตจำกัดที่เป็นสับเซตของ  $B$
- 3) มีเซตอนันต์ที่เป็นสับเซตของ  $A$
- 4) มีเซตอนันต์ที่เป็นสับเซตของ  $B$



## การให้เหตุผล

การให้เหตุผลแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัยได้แก่....
2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย ได้แก่....

**การใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์** เพื่อประกอบการสรุปผล แบบนิรนัย

- วาดแผนภาพตามที่เหตุกำหนดเท่านั้น
- พิสูจน์ผลที่โจทย์กำหนด ตามแผนภาพที่เห็นว่าสอดคล้องกัน

**หลักการวาดแผนภาพ**

- สมาชิกทุกตัวของ A เป็นของ B
- สมาชิกบางตัวของ A เป็นของ B
- ไม่มีสมาชิกของ A เป็นของ B

### ตัวอย่าง 1

- เหตุ 1. ฟ้าร้องทุกครั้งฝนจะตก  
 2. ฝนตกทุกครั้งกบจะร้อง  
 3. วันนี้กบจะร้อง
- ผล วันนี้ฟ้าร้อง

### ตัวอย่าง 2

- เหตุ 1. นกทุกตัวเป็นสัตว์ปีก  
 2. สัตว์ปีกทุกตัวบินได้  
 3. เครื่องบินโบอิงบินได้
- ผล เครื่องบินโบอิงเป็นสัตว์ปีก

ไม่มีใครตายเพราะเรียนหนังสือหนัก.....ครับโตๆ กันแล้ว อดเอานะ ^^

ตัวอย่างข้อสอบเรื่อง การให้เหตุผล // \*\*บางครั้งจะไปปนกับเรื่องสัจนิรันดร์

18. พิจารณาการให้เหตุผลต่อไปนี้

เหตุ 1. X

2. ละมั่งเป็นสัตว์สงวน

ผล ละมั่งเป็นสัตว์หายาก

ข้อสรุปข้างต้นสมเหตุสมผล ถ้า X แทนข้อความใด

- 1) สัตว์หายากทุกชนิดเป็นสัตว์สงวน
- 2) สัตว์หายากบางชนิดเป็นสัตว์สงวน
- 3) สัตว์สงวนทุกชนิดเป็นสัตว์หายาก
- 4) สัตว์สงวนบางชนิดเป็นสัตว์หายาก

19. พิจารณาการให้เหตุผลต่อไปนี้// การแทนค่า แล้ว ตรวจสอบ เป็นกลยุทธ์ที่ดีอย่างหนึ่งนะ...

เหตุ 1. ไม่มีคนชยันคนใดเป็นคนตงงาน

2. มีคนตงงานที่เป็นคนใช้เงินเก่ง

3. มีคนชยันที่ไม่เป็นคนใช้เงินเก่ง

ผล ?

ข้อใดต่อไปนี้เป็นผลที่จะทำให้การสรุปเหตุผลข้างต้นเป็นไปอย่างสมเหตุสมผล

- 1) มีคนชยันที่เป็นคนใช้เงินเก่ง
- 2) มีคนใช้เงินเก่งที่เป็นคนตงงาน
- 3) มีคนใช้เงินเก่งที่เป็นคนชยัน
- 4) มีคนตงงานที่เป็นคนชยัน

**เลขยกกำลัง**

**นิยามของเลขยกกำลัง**

ให้  $a$  แทนจำนวนใดๆ และ  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะได้ว่า

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n \quad \text{เมื่อ } a \text{ คือ ฐาน และ } n \text{ คือ เลขชี้กำลัง}$$

**สมบัติของเลขยกกำลัง**

เมื่อกำหนดให้  $a, b$  เป็นจำนวนใดๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์ และ  $n$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

1.  $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2.  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  หรือ  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3.  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$  และ  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
4.  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
5.  $a^0 = 1$
6. ถ้า  $a^m = a^n$  แล้วจะได้  $m=n$  โดยที่  $a \neq 0, 1$
7. ถ้า  $a^m = b^m$  แล้วจะได้  $m=0$  โดยที่  $a, b \neq 0, 1$

**ของแถม อยากรู้ก็ดูเอานะ.....**

1.  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
2.  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
3.  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot a}$  หรือ  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
4.  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

**จงทำให้เป็นรูปอย่างง่าย**

1.  $\frac{5 \cdot 3^n - 9 \cdot 3^{n-2}}{3^n - 3^{n-1}}$

$$2. \left( \frac{2552 - \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} - 2552} \right)^{\left( \frac{\frac{4}{3} - 8}{6} \right)}$$

$$3. \left( \frac{2^{3a+1} + 2^{2a+1}}{2^{2a+1} + 2^{a+1}} \right)^{\frac{1}{a}}$$

**สมการเลขยกกำลัง**

1.  $3^{3x-1} = 9^{x+2}$

2. ถ้า  $2^x = 3$  แล้วจงหา  $8^{-x}$

3.  $(x^2 + x - 1)^{x+1} = 1$

4. ถ้า  $2^x = 3^y = 36^z = 6$  แล้ว  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  มีค่าเท่าไร

5. ถ้า  $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$  แล้วจงหาค่าของ  $2^{-x}$

**ตัวอย่างข้อสอบ**

20. ถ้า  $81^x = 3^8$  และ  $125^{3y} = 625$  แล้ว  $x + 9y$  มีค่าเท่าใด

21. ถ้า  $\left(3 + \frac{3}{8}\right)^{3x} = \frac{16}{81}$  แล้ว  $x$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $-\frac{4}{9}$
- 2)  $-\frac{2}{9}$
- 3)  $-\frac{1}{9}$
- 4)  $\frac{1}{9}$

22. กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) ถ้า  $a < b$  แล้วจะได้  $a^2 < b^2$
- 2) ถ้า  $a < b < 0$  แล้วจะได้  $ab < a^2$
- 3) ถ้า  $|a| < |b|$  แล้วจะได้  $a < b$
- 4) ถ้า  $a^2 < b^2$  แล้วจะได้  $a < b$

23. ข้อใดมีค่าต่างจากข้ออื่น

- 1)  $(-1)^0$
- 2)  $(-1)^{0.2}$
- 3)  $(-1)^{0.4}$
- 4)  $(-1)^{0.8}$

24. อสมการในข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริง

- 1)  $2^{1000} < 3^{600} < 10^{300}$
- 2)  $3^{600} < 2^{1000} < 10^{300}$
- 3)  $3^{600} < 10^{300} < 2^{1000}$
- 4)  $10^{300} < 2^{1000} < 3^{600}$

**ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน**

**ฟังก์ชัน** หมายถึง ความสัมพันธ์ที่ไม่มีสมาชิกตัวหน้าซ้ำกัน

**แล้วความสัมพันธ์ คือ.....**

**ตัวอย่าง** ความสัมพันธ์ใดบ้างที่เป็นฟังก์ชัน

$$A = \{(-1,1), (3,5), (1,2), (2,1)\}$$

$$B = \{(-3,1), (7,2), (-3,-1), (2,7)\}$$

$$C = \{(2,3), (3,3), (5,7), (7,9)\}$$

$$D = \{(1,0), (\sin 90^\circ, \cos 0^\circ), (\sin 0^\circ, \cos 90^\circ)\}$$

**ตัวอย่างข้อสอบ....**

25. กำหนดให้  $A = \{0, 1, 2\}$  และ  $B = \{a, b, c\}$  ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันจาก B ไป A

1)  $\{(a,1), (b,0), (c,1)\}$

2)  $\{(0,b), (1,a), (1,c)\}$

3)  $\{(b,1), (c,0)\}$

4)  $\{(0,c), (1,b)\}$

26. ความสัมพันธ์ในข้อใดเป็นฟังก์ชัน

1)  $\{(0,1), (0,2), (2,1), (1,3)\}$

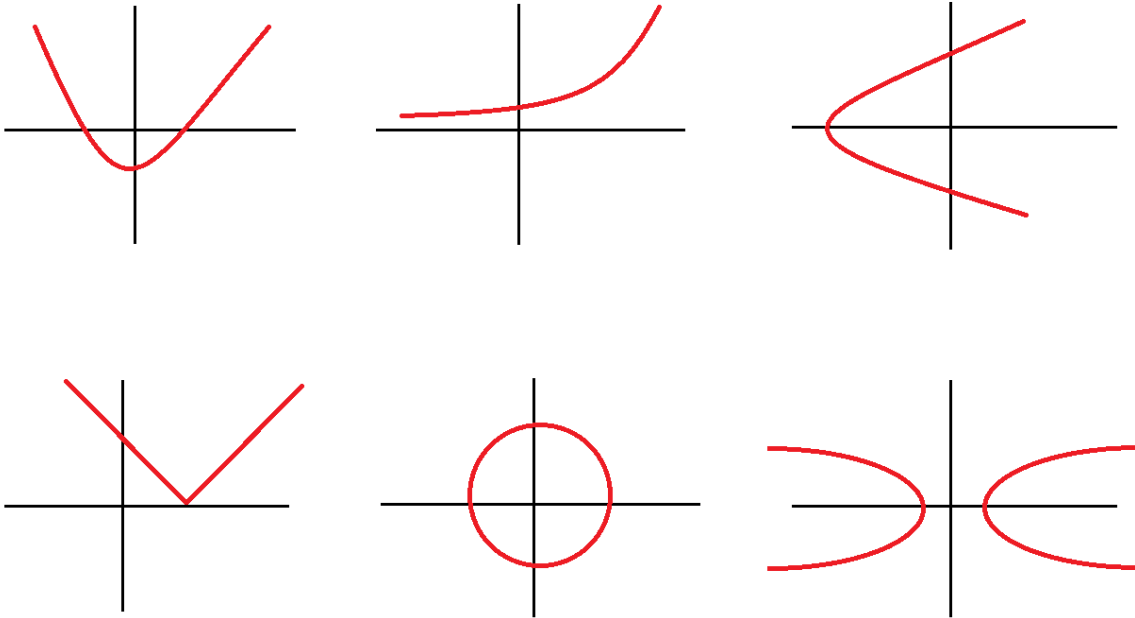
2)  $\{(0,2), (1,1), (2,2), (3,0)\}$

3)  $\{(1,1), (2,0), (2,3), (3,1)\}$

4)  $\{(1,2), (0,3), (1,3), (2,2)\}$

การพิจารณาว่ากราฟใดเป็นฟังก์ชัน...

หลักการ คือ ...



การหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

โดเมน ( $D_f$ ) คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับใน  $f$  ของคู่อันดับใน  $f$

- จัดสมการให้อยู่ในรูป  $y = \dots x \dots$
- พิจารณาว่าค่า  $x$  ใดบ้างที่ทำให้  $y$  ค่าไม่ได้หาค่าไม่ได้

เรนจ์ ( $R_f$ ) คือ เซตของสมาชิกตัวหลัง

- จัดสมการให้อยู่ในรูป  $x = \dots y \dots$
- พิจารณาว่าค่า  $y$  ใดบ้างที่ทำให้  $x$

ลองหาโดเมน และเรนจ์ ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1.  $R = \sqrt{x^2 - 49}$
2.  $R = \frac{2x - 4}{x - 3}$

3.  $R = x^2 - 4x - 10$

4.  $R = |x - 5| + 2$

**ตัวอย่างข้อสอบ**

27. ถ้า  $f(x) = 3 - \sqrt{4 - x^2}$  แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นคำตอบ

1)  $D_f = [-2, 2], R_f = [0, 3]$

2)  $D_f = [-2, 2], R_f = [1, 3]$

3)  $D_f = [0, 2], R_f = [0, 3]$

4)  $D_f = [0, 2], R_f = [1, 3]$

**การแทนค่าในฟังก์ชัน**

ถ้า  $f(x) = \text{Term}(x)$  แล้ว  $f(a) = \text{Term}(a)$

เช่น

1.  $f(x) = 2x + 1$  จงหา  $f(0)$

2.  $f(2x + 1) = 5x$  จงหา  $f(1)$



ตัวอย่างข้อสอบ...

28. กำหนดให้  $f(x+1) = x^2 + 2x - 1$  จงหา  $f(4) + f(-3)$

29. กำหนด  $f(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ x, & x = 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$  จงหาค่าของ  $f(-1) + f(0) + f(3)$

30.  $f(0) = 2$ , และ  $f(x+2) = 4f(x)$  จงหาค่าของ  $f(2)$

31. ถ้า  $f(x-2) = 2x - 1$  แล้ว  $f(x^2)$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1)  $2x^2 - 1$
- 2)  $2x^2 + 1$
- 3)  $2x^2 + 3$
- 4)  $2x^2 + 9$

ค่าสูงสุด / ต่ำสุดของฟังก์ชัน กำลังสอง

เทคนิค ของพาราโบลา....  $\left( \frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a} \right)$

32. กำหนดให้  $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$  ซึ่งมีตำแหน่งสูงสุดอยู่ที่พิกัด (a,b) แล้วจงหา a+b  
 \*\*เทคนิคพาราโบลา\*\* "บางเรื่อง จำเป็นต้องจำ ทั้งที่ไม่อยากจำ"

33. ถ้า  $f(x) = -x^2 + x + 2$  แล้ว ข้อสรุปใดถูกต้อง \*\*วาดรูปช่วย

- 1)  $f(x) \geq 0$  เมื่อ  $-1 \leq x \leq 2$
- 2) จุดวกกลับของกราฟของฟังก์ชัน f อยู่ในจุดภาคที่สอง
- 3) ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดเท่ากับ 2
- 4) ฟังก์ชัน f มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 2

**การหาอินเวอร์สของฟังก์ชัน...**

ถ้าให้  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันใดๆ แล้วจะเรียก  $f^{-1}(x)$  ว่าเป็นอินเวอร์ส ของฟังก์ชัน

**ถ้าข้อสอบออกเป็นคู่อันดับ....**

1. จงหาอินเวอร์สของ  $f = \{ (1,2), (3,4), (5,6) \}$

**ถ้าข้อสอบออกเป็นสมการเงื่อนไข....**

1. จงหาอินเวอร์สของ  $r = \{(x, y) \in R \mid y = 2x - 1\}$

แบบที่ 1 ...

แบบที่ 2 ...

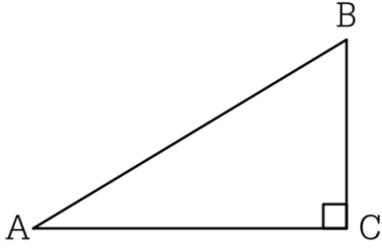
แบบที่ 3 ...

2. จงหาอินเวอร์สของ  $r = \left\{ (x, y) \in R \mid y = \frac{x}{x-1} \right\}$

3. จงหาอินเวอร์สของ  $r = \left\{ (x, y) \in R \mid y = \sqrt{x^2 - 9} \right\}$

**\*\*จงฝึกคิดในใจนะ....**

**อัตราส่วนตรีโกณมิติ**



sin A =

cos A =

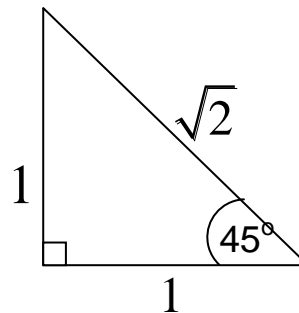
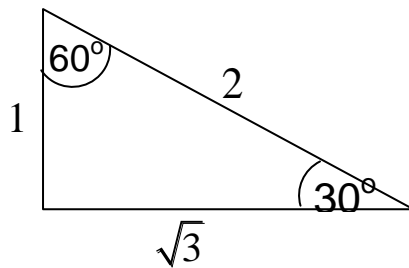
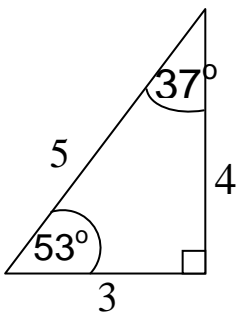
tan A =

ความสัมพันธ์ที่ควรรู้

1. cosec θ =
2. sec θ =
3. cot θ =
4. tan θ =
5. sin<sup>2</sup> θ + cos<sup>2</sup> θ =
6. tan<sup>2</sup> θ + 1 =

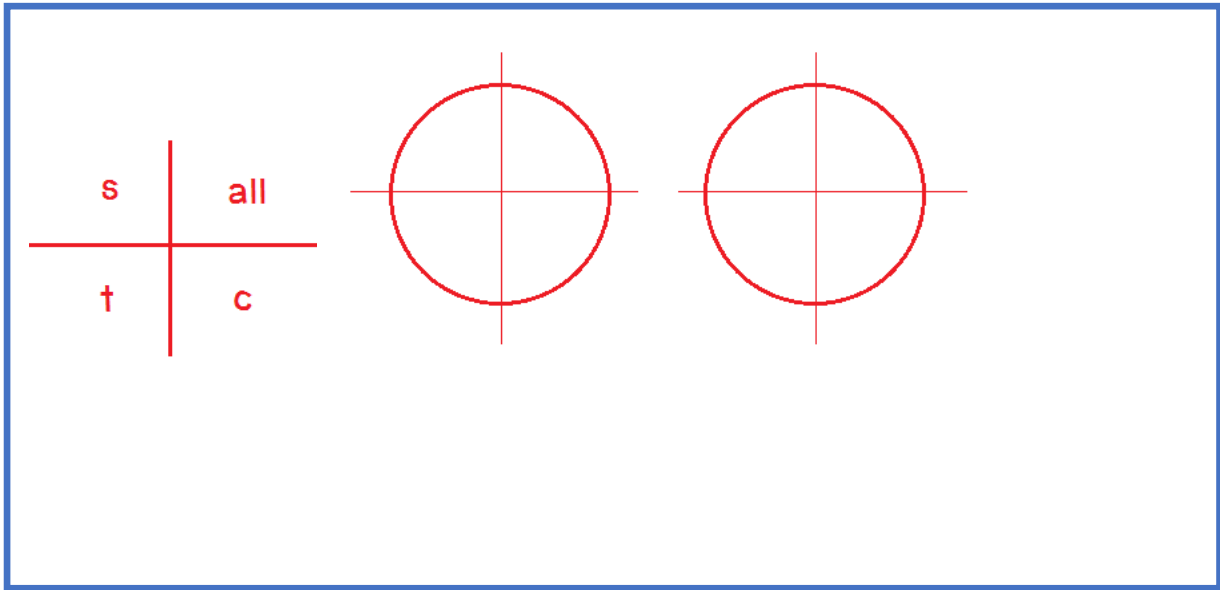
อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่ควรรู้จัก

ค่าตรีโกณมิติ	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞



ที่นี้เรียนอยู่ด้วยกันนี่...ไม่มีใครเก่งกว่าใครหรอก...มีแค่คนขยันตั้งใจ กับคนขี้เกียจก็เท่านั้นเอง!!

**ค่าตรีโกณในควอดรนต์ที่ 2, 3, 4**



**โคฟังก์ชัน (co-function)**



ลองทำดู.....

1. ถ้า  $4\sin A = 2$  แล้ว จงหาค่าของ  $\cos A + \operatorname{cosec} A$

2. กำหนดให้  $2\cos x = \sqrt{3}$  จงหาค่าของ  $\sin x, \tan x$

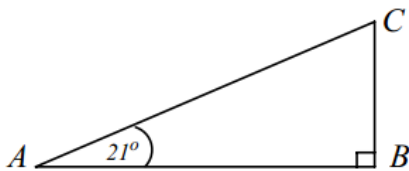
3. มองเพื่อนซึ่งอยู่บนตึกสูง 20 เมตร เป็นมุมเงย 30 องศาพอดี จงประมาณว่าขณะนั้นเพื่อนอยู่ห่างจากนักเรียนเป็นระยะทางกี่เมตร

**ตัวอย่างข้อสอบเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ**

34. ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง \*\*เทคนิคการประมาณค่า

- 1)  $\sin 30^\circ < \sin 45^\circ$
- 2)  $\cos 30^\circ < \cos 45^\circ$
- 3)  $\tan 45^\circ < \cot 45^\circ$
- 4)  $\tan 60^\circ < \cot 60^\circ$

35. จากรูป \*\*เทคนิคการลดรูปมุม และ เอกลัษณ์



ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

- 1)  $\sin 21^\circ = \cos 69^\circ$
- 2)  $\sin 21^\circ = \cos 21^\circ$
- 3)  $\cos 21^\circ = \tan 21^\circ$
- 4)  $\tan 21^\circ = \cos 69^\circ$

36. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี B เป็นมุมฉาก ถ้า  $\cot A = \frac{12}{5}$  แล้ว

$10\operatorname{cosec} A + 12\sec A$  มีค่าเท่าใด

37. กำหนดให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม  $B$  เป็นมุมฉาก มีมุม  $A$  เท่ากับ  $30^\circ$  และมีพื้นที่เท่ากับ  $24\sqrt{3}$  ตารางหน่วย ความยาวของด้าน  $AB$  เท่ากับกี่หน่วย

38. กำหนดให้  $ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่เท่ากับ 15 ตารางหน่วย และมีมุม  $C$  เป็นมุมฉาก ถ้า  $\sin B = 3\sin A$  แล้วด้าน  $AB$  ยาวเท่าใด

39. ถ้า  $2\cos^2 \theta + \cos \theta = 1$  โดยที่  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$   
แล้ว  $\theta$  เป็นมุมกี่องศา

40.  $\operatorname{cosec} 30^\circ \left( \frac{\sin 31^\circ \cdot \sin 35^\circ}{\cos 35^\circ \cdot \cos 59^\circ} \right) \tan 55^\circ$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

“ข้อสอบที่ให้มาทำ...ถ้าไหวก็ฝึก ถ้าไม่ไหวก็ไปลดขนาดความฝันลง” ชีวิตเรา ต้อง เลือกเอง นะ.....

**ลำดับและอนุกรม**

ลำดับ คือ พังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนเต็มบวก

ลำดับจำกัด คือ

ลำดับอนันต์ คือ

**ลำดับเลขคณิต** คือ ลำดับที่มีผลต่างร่วม  $d$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{เมื่อ } d = a_{n+1} - a_n$$

ตัวอย่างเช่น....

**ลำดับเรขาคณิต** คือ ลำดับที่มีอัตราส่วนร่วม  $r$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$\text{เมื่อ } r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

ตัวอย่างเช่น...

**ตัวอย่างข้อสอบ**

41. กำหนดให้  $\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots$  เป็นลำดับเลขคณิต ผลบวกของพจน์ที่ 40 และพจน์ที่ 42 เป็นเท่าใด



42. ถ้าอนุกรมเลขคณิต คือ 17, x, y, 35 จงหาค่าของ x + y

43. พจน์ที่ 31 ของลำดับเลขคณิต  $-\frac{1}{20}, -\frac{1}{30}, -\frac{1}{60}, \dots$  มีค่าเท่ากับเท่าไร

44. พจน์ที่ 16 ของลำดับเรขาคณิต  $\frac{1}{625}, \frac{1}{125\sqrt{5}}, \frac{1}{125}, \dots$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- |                  |        |
|------------------|--------|
| 1) $25\sqrt{5}$  | 2) 125 |
| 3) $125\sqrt{5}$ | 4) 625 |

45. กำหนดให้  $a_1, a_2, a_3, \dots$  เป็นลำดับเรขาคณิต ถ้า  $a_2 = 8$  และ  $a_5 = -64$  แล้ว ผลบวกของ 10 พจน์แรกของลำดับนี้เท่ากับข้อใด

- |          |          |
|----------|----------|
| 1) 2,048 | 2) 1,512 |
| 3) 1,364 | 4) 1,024 |

46. ค่าของ  $1 + 6 + 11 + 16 + \dots + 101$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

**เครื่องหมาย Sigma ( $\Sigma$ )**

หมายถึง การแทนค่าตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วนำผลลัพธ์มาบวกกัน

เช่น 1.  $\sum_{x=1}^5 x$

2.  $\sum_{x=1}^5 x^2$

3.  $\sum_{x=1}^5 2x-1$

เมื่อตัวเลขมีจำนวนมากๆ การคิดโดยตรงไม่สะดวก ต้องพึ่งพาสสมบัติของซิกมา

**สมบัติของเครื่องหมาย  $\Sigma$  (ต้องจำให้ได้นะครี...^^)**

1.  $\sum_{i=1}^n c = nc$  เมื่อ  $c$  คือค่าคงที่ใดๆ (ตัวเลขใดๆ นั่นเอง)

2.  $\sum_{i=1}^n (A \pm B) = \sum_{i=1}^n A \pm \sum_{i=1}^n B$

3.  $\sum_{i=1}^n (kA) = k \cdot \sum_{i=1}^n A$  เมื่อ  $k$  คือค่าคงที่ใดๆ (ตัวเลขใดๆ นั่นเอง)

4.  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

5.  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

6.  $\sum_{i=1}^n i^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

ลองทำดู...

1.  $\sum_{1}^{50} 2n =$

2.  $\sum_{1}^{50} 2n-1 =$

3.  $\sum_1^{50} n^2 =$

4.  $\sum_1^{50} (n^2 + 2n + 1) =$

**ความน่าจะเป็น**

- เครื่องหมายแฟคทอเรียล

ลองทำดู...

1.  $\frac{2!}{0!}$

2.  $5!$

3.  $10!$

4.  $\frac{8!}{5!}$

5.  $\frac{10!}{8!}$

6.  $\frac{12!.5!}{10!.6!}$

7.  $\frac{n!}{(n-1)!}$

8.  $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

- การทำงานต่อเนื่องกันจำนวนวิธี = a x b x c x d x...

ลองทำดู

1. ในการเข้า-ออก ห้องหนึ่งมีประตูทางเข้า 3 ประตู มีประตูทางออก 4 ประตูจงหาจำนวนวิธีในการเข้าในประตูทางเข้า และออกในประตูทางออก

2. มีกับข้าว 4 อย่าง ของหวาน 3 อย่าง และ เครื่องดื่มอีก 4 ชนิด จงหาจำนวนวิธีในการรับประทาน อาหารและเครื่องดื่ม โดยต้องรับประทานกับข้าว ของหวาน และเครื่องดื่ม ชนิดละ 1 อย่าง

- การเรียงสิ่งของหรือ การสลับที่สิ่งของในแถว

มีสิ่งของ  $n$  สิ่งนำมาวางเรียงกันทั้งหมด โดยสนใจตำแหน่งที่จัดวาง อาจจะไม่ต้องเป็นการเรียงสิ่งของโดยตรง เป็นอะไรก็ได้ ที่นำมาสลับที่ หรือ สลับตำแหน่งกัน จำนวนวิธีทั้งหมด จะเท่ากับ  $n!$

1. จงหาจำนวนวิธีในการจัดนักเรียน 5 คน เข้าแถวซื้ออาหาร
2. จงหาจำนวนวิธีในการจัดนักเรียน 5 คน และครู 1 คน เข้าแถวถ่ายรูป โดยครูจะต้องยืนตรงซ้ายมือสุด หรือขวามือสุดเท่านั้น
3. จงสลับที่ตัวอักษร MATHEC
4. จงสลับที่ตัวอักษร ABBACAS

5. จำนวนวิธีในการเข้าเส้นชัยของการแข่งขันวิ่งซึ่งมีทั้งหมด 4 ลู่วิ่ง

- การเลือกสิ่งของบางอย่าง จากสิ่งของทั้งหมด

ไม่สนใจตำแหน่งสิ่งของ การสลับที่สิ่งของไม่ถือว่าเป็นเกิดวิธีใหม่  
ประยุกต์ใช้กับโจทย์ได้หลากหลายมากที่สุด

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

ลองทำดู...

1.  $\binom{5}{3}$

2.  $\binom{5}{2}$

3.  $\binom{5}{5}$

4.  $\binom{5}{1}$

บทประยุกต์และการนำไปใช้...

1. เลือกไฟ 2 ใบ จากไฟ 1 สำหรับแล้วได้ไฟโพล่า \*\*เลือกสิ่งของจากกลุ่มสิ่งของที่ต้องการเท่านั้น\*\*

2. เลือกลูกบอล 2 ลูก แล้วได้สีแดงทั้งสองลูก จากกล่อง ที่มีลูกบอลแดง 5 ลูก และฟ้า 4 ลูก

3. จัดนักเรียน 8 คน เข้าบ้านพัก 3 หลัง ซึ่งบรรจุได้ 4 คน 3 คน และ 1 คน ตามลำดับ จะจัดคนเข้าบ้านพักได้กี่วิธี

คำเตือน จากพี่โต้ง : “บทประยุกต์ควรทำได้ ทฤษฎีพื้นฐานควรรู้”

5. มีเส้นตรงแนวดิ่งขนานกัน 4 เส้น เมื่อนำมาตัดกับเส้นตรงแนวนอนที่ขนานกันทั้งหมด 4 เส้น จะเกิดรูปสี่เหลี่ยมทั้งหมดกี่รูป

**ความน่าจะเป็น**

ความน่าจะเป็น คือ จำนวนที่บอกให้ทราบว่าเหตุการณ์ที่เราสนใจ มีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด

เมื่อ  $S$  แทน แซมเปิลสเปซ (Sample Space)

$E$  แทน เหตุการณ์ใด ๆ (Event)

**\*\*ความน่าจะเป็นไม่ยาก สิ่งที่ยากคือการหาเหตุการณ์ มาใส่ในความน่าจะเป็น\*\***

เมื่อเหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์ใน  $S$  มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน

จะได้ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์หาได้จาก

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

**คุณสมบัติของความน่าจะเป็น**

1.  $0 \leq P(E) \leq 1$
2.  $P(E) = 1$  หมายความว่า เหตุการณ์นั้น ๆ มีโอกาสเกิดขึ้นแน่นอน
3.  $P(E) = 0$  หมายความว่า เหตุการณ์นั้น ๆ ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นแน่นอน

**ลองทำดู...**

1. ครอบครัวหนึ่งต้องการบุตร 3 คน ความน่าจะเป็นที่จะได้บุตรเป็นชายอย่างน้อย 2 คน
2. กล่องที่มีลูกบอลแดง 5 ฟ้า 4 เขียว 3 จงหาความน่าจะเป็นในการหยิบลูกบอล 3 ลูกโดยหยิบได้ลูกบอลสีแดงทั้งหมด

3. การจัดนักเรียนชาย 5 คนและนักเรียนหญิง 5 คน เข้าคิว จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนหญิงได้คนแรกและคนสุดท้าย
6. จัดให้นักท่องเที่ยวชาย 5 คน หญิง 3 คน เข้าบ้านพัก 2 หลังๆ ละ 4 คน ความน่าจะเป็นที่นักท่องเที่ยวหญิงได้พักบ้านหลังเดียวกัน
7. ความน่าจะเป็นที่สมชาย และ พรพรรณ จะเกิดวันต่างกัน ของจำนวนวันใน 1 สัปดาห์ เป็นเท่าไร

## ตัวอย่างข้อสอบ

ONET สำหรับบางคนก็ง่ายจนน่าเบื่อ แต่อีกหลายคนก็ยากจนเบื่อ!!

เหมมแตมรวมเบเน 10 และเหมมสลาเกเบเดมหมายเลขสูงกวา 5 มคาเทาเกบขอเดตอเบเน

1)  $\frac{1}{60}$

2)  $\frac{1}{40}$

3)  $\frac{1}{30}$

4)  $\frac{1}{20}$

48. ถ้านำตัวอักษรทั้งหมดจากคำว่า BANANAS มาจัดเรียงเป็นคำต่างๆ โดยไม่จำเป็นต้องมีความหมาย จะจัดเป็นคำที่แตกต่างกันได้กี่วิธี



49. โยนลูกเต๋า 3 ลูก ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าคือขึ้นแต้มคืออย่างน้อย 1 ลูก เท่ากับข้อใดต่อไปนี้  
 \*\*โจทย์หลอกว่าเป็นลูกเต๋าคู่แท้จริงคือเรื่องเหรียญ \*\*

- 1)  $\frac{2}{3}$
- 2)  $\frac{5}{8}$
- 3)  $\frac{3}{4}$
- 4)  $\frac{7}{8}$

## สถิติ

สถิติ หมายถึง ตัวเลขที่แทนจำนวนหรือข้อเท็จจริงของสิ่งที่เราศึกษา มีลักษณะข้อมูล 2 ประเภท

1. ข้อมูลเชิงปริมาณคือ...
2. ข้อมูลเชิงคุณภาพคือ ....

เมื่อจำแนกตามลักษณะของข้อมูล สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิดคือ

1. **ข้อมูลเชิงคุณภาพ (Qualitative Data)** หมายถึง ข้อมูลที่ไม่สามารถบอกได้ว่า มีค่ามากหรือน้อย แต่จะสามารถบอกได้ว่าดีหรือไม่ดี หรือบอกลักษณะความเป็นกลุ่มของ ข้อมูล เช่น เพศ ศาสนา สีผม คุณภาพสินค้า ความพึงพอใจ ฯลฯ

2. ข้อมูลเชิงปริมาณ (Quantitative Data) หมายถึง ข้อมูลที่สามารถวัดค่าได้ ว่ามีค่ามากหรือน้อยซึ่งสามารถวัดค่าออกมาเป็นตัวเลขได้ เช่น คะแนนสอบ อุณหภูมิ ส่วนสูง น้ำหนัก ปริมาณต่างๆ ฯลฯ

ค่ากลาง	ข้อมูลแบบไม่แจกแจงความถี่
ค่าเฉลี่ยเลขคณิต(Mean) : $\bar{X}$	
มัธยฐาน(Median)	
ฐานนิยม(Mode)	
เปอร์เซ็นต์ไทล์(Percentile)	

**\*\*ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและความแปรปรวน\*\*** // ความรู้ม.ต้นนะ...ว่าแต่จำได้มัย.....

**ค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม**

$$\bar{X}_{รวม} =$$

- เมื่อมีการแก้ไขข้อมูลทั้งหมดโดยการบวก / ลบ ด้วยค่าคงที่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตจะเปลี่ยนแปลง
- เมื่อมีการแก้ไขข้อมูลทั้งหมดโดยการคูณ ด้วยค่าคงที่ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน จะเปลี่ยนแปลง

**ความแปรปรวนรวม** เมื่อ  $\bar{X}_1 = \bar{X}_2$  คือ....

**เทคนิคเกี่ยวกับค่ากลาง...**

50. ข้อมูลชุดหนึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 11 โดยข้อมูลคือ 13,8,x,7,15,11 แล้วค่าของ x เป็นเท่าไร

51. ข้อมูลชุดหนึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 12 มัธยฐาน 10 และ ฐานนิยม 13 ถ้ามีการปรับข้อมูลเพิ่มเติมอีก 2 ทุกๆข้อมูล จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐานและฐานนิยมใหม่

52. นักเรียนคนหนึ่งมีคะแนนสอบ 4 ครั้งเท่ากับ 19, 20, 22, 21 ในการสอบครั้งที่ 5 ถ้าต้องการให้คะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 22 คะแนน นักเรียนคนนี้จะต้องสอบให้ได้คะแนนกี่คะแนน

53. คะแนนเฉลี่ยในการสอบเก็บคะแนนวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ 80 คะแนน มีนักเรียนสอบทั้งหมด 30 คน ต่อมาตรวจสอบพบว่ามีการกรอกคะแนนผิดคือ 75 คะแนนกรอกเป็น 85 และ 90 คะแนน กรอกเป็น 65 คะแนน จงหาค่าเฉลี่ยที่ถูกต้อง

54. คะแนนเฉลี่ยจากการสอบเก็บคะแนนของนักเรียนห้องม.2/1 เท่ากับ 12 คะแนน ห้องม.2/2 เท่ากับ 16 คะแนน จงหาคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งสองห้องเมื่อนักเรียนห้องม.2/1 มีนักเรียน 40 คน และนักเรียนห้องม.2/2 มีนักเรียน 50 คน

**ตัวอย่างข้อสอบ**

55. แผนภาพต้น - ใบของข้อมูลชุดหนึ่งเป็นดังนี้

0	3	7	5	
1	6	4	3	
2	0	2	1	2
3	0	1		

สำหรับข้อมูลชุดนี้ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

- 1) มัธยฐาน <ฐานนิยม <ค่าเฉลี่ยเลขคณิต      2) มัธยฐาน <ค่าเฉลี่ยเลขคณิต <ฐานนิยม
- 3) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต <ฐานนิยม <มัธยฐาน      4) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต <มัธยฐาน <ฐานนิยม

56. แผนภาพต้น - ใบ ของน้ำหนักในหนึ่งกรัมของไข่ไก่ 10 ฟอง เป็นดังนี้

5	7	8		
6	7	8	9	
7	0	4	4	7
8	1			

**\*\*มีต่อหน้าถัดไป\*\***

ข้อสรุปใดเป็นเท็จ

- 1) ฐานนิยมของน้ำหนักของไข่ไก่มีเพียงค่าเดียว
- 2) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและมัธยฐานของน้ำหนักของไข่ไก่มีค่าเท่ากัน
- 3) มีไข่ไก่ 5 ฟองที่มีน้ำหนักน้อยกว่า 70 กรัม
- 4) ไข่ไก่ที่มีน้ำหนักสูงกว่าฐานนิยม มีจำนวนมากกว่า ไข่ไก่ที่มีน้ำหนักเท่ากับฐานนิยม

57. จงพิจารณาแผนภาพต้นไม้ แล้วพิจารณาข้อความใดถูกหรือผิด

2	0	0	3	5	8
3	1	4	4	6	7
4	3	3	5	7	
5	1	2	2	2	
6	3	5			

- a. ข้อมูลชุดนี้ไม่มีฐานนิยม
- b. มัธยฐานของข้อมูล คือ 40

58. จากตารางแสดงน้ำหนักของนักเรียนจำนวน 50 คน

ช่วงน้ำหนัก (กก.)	จำนวน (คน)
30 – 39	4
40 – 49	5
50 – 59	13
60 – 69	17
70 – 79	6
80 – 89	5

มัธยฐานของข้อมูลอยู่ในอันตรภาคชั้นใด

59. ชายคนหนึ่งตัดปลาที่เลี้ยงไว้ในกระชังเพื่อส่งขายจำนวน 500 ตัว ซึ่งมีน้ำหนักโดยเฉลี่ยตัวละ 700 กรัม ในจำนวนนี้เป็นปลาจากกระชังที่หนึ่ง 300 ตัว และจากกระชังที่สอง 200 ตัว ถ้าปลาในกระชังที่หนึ่งมีน้ำหนักเฉลี่ยต่อตัวมากกว่าในกระชังที่สอง 50 กรัม แล้วเขาตัดปลาจากกระชังที่สองมากี่กรัม

60. ตารางแจกแจงความถี่ แสดงจำนวนนักเรียนในช่วงอายุต่างๆ ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเป็นดังนี้

ช่วงอายุ (ปี)	ความถี่ (คน)
1 - 5	4
6 - 10	9
11 - 15	2
16 - 20	5

อายุเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มนี้เท่ากับเท่าใด

61. กำหนดให้ตารางแจกแจงความถี่สะสมของคะแนนของนักเรียนห้องหนึ่ง เป็นดังนี้จงหาว่ามัธยฐานของข้อมูลอยู่ในอันตรภาคชั้นใด .....

ช่วงคะแนน	ความถี่สะสม (คน)
30 - 39	1
40 - 49	11
50 - 59	18
60 - 69	20

62. แถมให้อีก 1 ข้อ\*\* ถ้า  $\left(\sqrt{\frac{8}{27}}\right)^4 = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{x}}$  และ  $y = 3x$  แล้ว  $y$  เท่ากับเท่าใด

อ่านทุกวัน วันละนิด เรียกว่า **ขยัน**  
อ่านวันสุดท้าย ก่อนสอบ วันละเยอะๆ เรียกว่า **มักง่าย**  
โชคดีในการสอบทุกคนครับ....

**ครูพีโต้ง (FB : ครูโต้ง ครูฟิสิกส์ขาหัก)**